ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN QUỐC VIỆT

PHƯƠNG PHÁP LẶP HIỆN LAI GHÉP ĐƯỜNG DỐC NHẤT GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN QUỐC VIỆT

PHƯƠNG PHÁP LẶP HIỆN LAI GHÉP ĐƯỜNG DỐC NHẤT GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 5/2017

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của ánh xạ A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của ánh xạ A
I	ánh xạ đồng nhất
$l^p,\ 1 < p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
$L^p[a,b],\ 1 < p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f

Mở đầu

Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng của H và $F : H \to H$ là một ánh xạ. Bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển (*classical variational inequality*) được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm điểm } p_* \in C \textit{ thỏa mãn:} \quad \langle Fp_*, p - p_* \rangle \geq 0 \quad \forall p \in C. \tag{1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân được nhà toán học người Italia, Stampacchia (xem [10] và [15]), nghiên cứu và đưa ra đầu tiên vào cuối những năm 60 và đầu những năm 70 của thế kỷ trước. Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một đề tài thời sự, thu hút được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu do vai trò quan trọng của bài toán trong lý thuyết toán học cũng như trong nhiều ứng dụng thực tế.

Khi tập ràng buộc C của bài toán (1) được cho dưới dạng ẩn là tập điểm bất động chung của một họ (hữu hạn hoặc vô hạn) các ánh xạ không giãn thì bài toán (1) còn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế như xử lý tín hiệu, khôi phục ảnh, phân phối băng thông và bài toán điều khiển tối ưu.... Đối với lớp bài toán này, phương pháp lai ghép đường dốc nhất của Yamada đề xuất năm 2001 (xem [17]) tỏ ra là phương pháp khá hiệu quả khi ánh xạ $F : H \to H$ là ánh xạ đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz trên không gian Hilbert H. Phương pháp này đã khắc phục được khó khăn của việc thực hiện phép chiếu mêtric P_C chiếu H lên tập con lồi đóng bất kỳ C của H khi dùng dãy lặp Picard dạng $x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n F x_n)$ để giải, ở đây $\{\lambda_n\}$ là dãy tham số thỏa mãn một số điều kiện nhất định.

Dựa trên cách tiếp cận của Yamada, đã có nhiều nghiên cứu nhằm mở rộng và cải biên phương pháp lai ghép dạng đường dốc nhất cho bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc C là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn, họ vô hạn đếm được hay nửa nhóm các ánh xạ không giãn. Các phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Luận văn trình bày phương pháp lặp hiện lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Banach trên cơ sở 2 bài báo [6] và [8] của Nguyễn Thị Thu Thủy và các đồng tác giả công bố năm 2015 và 2017. Nội dung của đề tài luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1 "Bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu": giới thiệu về bất đẳng thức biến phân đơn điệu và j-đơn điệu trong không gian Banach.

Chương 2 "Phương pháp lặp hiện lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu": giới thiệu về nửa nhóm ánh xạ không giãn, trình bày sự hội tụ của phương pháp lặp hiện lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn và trình bày ví dụ minh họa.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô của khoa Toán–Tin và các thầy cô trong trường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu trường Trung học phổ thông Đông Triều - Quảng Ninh và các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học.

Xin cảm ơn các anh chị học viên lớp Cao học Toán K9C và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Quốc Việt

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất của không gian Banach phản xạ, lồi đều, trơn đều, ánh xạ đơn điệu, ánh xạ j-đơn điệu, đồng thời giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, j-đơn điệu trong không gian Banach. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1]-[5], [9]-[14] và [18].

1.1 Không gian Banach

Cho E là không gian Banach với không gian đối ngẫu ký hiệu là E^*. Ta dùng ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn trong E và E^* và viết tích đối ngẫu $\langle x^*, x\rangle$ thay cho giá trị của phiếm hàm tuyến tính $x^* \in E^*$ tại điểm $x \in E$, tức là $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$.

1.1.1 Không gian Banach phản xạ, lồi và trơn

Định nghĩa 1.1.1 Không gian Banach E được gọi là phản xạ, nếu với mọi phần tử $x^{**} \in E^{**}$, không gian liên hợp thứ hai của E, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \text{với mọi} \quad x^* \in E^*.$$

Định lý 1.1.2 *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) E là không gian phản xạ;

(ii) Mọi dãy bị chặn trong E đều có một dãy con hội tụ yếu.

Ví dụ 1.1.3 Các không gian véc tơ định chuẩn hữu hạn chiều, không gian Hilbert H, không gian l^p, không gian $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$ là các không gian Banach phản xạ.

Ký hiệu $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach E.

Định nghĩa 1.1.4 Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi điểm $x, y \in S_E$, $x \neq y$, ta có

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \text{với mọi} \quad \lambda \in (0,1).$$

Chú ý 1.1.5 Định nghĩa 1.1.4 còn có thể phát biểu dưới dạng tương đương sau: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi điểm $x, y \in E$, $x \neq y$, mà $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ ta có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Ví dụ 1.1.6 Không gian $E = \mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_2$ được xác định bởi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

là không gian lồi chặt.

Không gian $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_1$ xác định bởi

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

không phải là không gian lồi chặt. Thật vậy, lấy $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $y = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Ta thấy $x \neq y$, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ nhưng $\|x+y\|_1 = 2$.

Tương tự không gian $E = \mathbb{R}^n$ với

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

không lồi chặt.

Định nghĩa 1.1.7 Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi x, $y \in E$ mà $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Ví dụ 1.1.8 Không gian Hilbert H, không gian l^p, không gian $L^p[a, b]$ với $1 < p < \infty$ là các không gian lồi đều.

Ta sẽ chỉ ra không gian Hilbert H là không gian lồi đều. Thật vậy, từ đẳng thức hình bình hành

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in H$$

suy ra

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

Lấy $x, y \in S_H$, hình cầu đóng đơn vị trong H, với $x \neq y$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Khi đó $\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$. Suy ra

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Do đó

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 - \Big(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\Big), \quad \delta(\varepsilon) = \Big(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\Big).$$

Định lý 1.1.9 *Mọi không gian Banach lồi đều đều là không gian lồi chặt và phản xạ.*

Để đo tính lồi của không gian Banach E người ta sử dụng khái niệm mô đun lồi của E.

Định nghĩa 1.1.10 Cho E là một không gian Banach. Hàm $\delta_E(\varepsilon) : [0, 2] \to [0, 1]$ được gọi là mô đun lồi của E nếu

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Ví dụ 1.1.11 Mô đun lồi của không gian Hilbert H là

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad \varepsilon \in (0, 2].$$